Różniczka funkcji, pochodne cząstkowe funkcji złożonej.
Funkcje uwikłane

Anna Bahyrycz

Definicja 1 (Różniczka funkcji)

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych $\Delta x, \Delta y$ określoną wzorem

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Twierdzenie 1 (Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Wówczas

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

przy czym błąd $\delta(\Delta x, \Delta y)$ powyższego przybliżenia dąży szybciej do 0 niż wyrażenie $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Przykład 1

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia $\dfrac{\text{arctg}\,0{,}9}{\sqrt{4{,}02}}$.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y), \qquad \textit{czyli}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(x, y) = \frac{\text{arctg}\, x}{\sqrt{y}}, \quad (x_0, y_0) = (1, 4), \quad \Delta x = -0,1 \quad i \quad \Delta y = 0,02$$

$$f(1, 4) = \frac{\text{arctg}\, 1}{\sqrt{4}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \text{arctg}\, x \cdot \left(-\frac{1}{2y\sqrt{y}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 4) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi}{64};$$

$$\frac{\text{arctg}\, 0,9}{\sqrt{4,02}} \approx \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot (-0,1) + \left(-\frac{\pi}{64}\right) \cdot 0,02 = 0,3811$$

$$\frac{\text{arctg}\, 0,9}{\sqrt{4,02}} = 0,3654 \text{ \textit{z dokładnością do 4 miejsca po przecinku}}$$

Twierdzenie 2 (O pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli

1. *funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$ mają pochodne właściwe w punkcie t_0,*
2. *funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$,*

to funkcja złożona $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ ma w punkcie t_0 pochodną właściwą wyrażoną wzorem:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

gdzie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ są liczone w punkcie $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$, zaś pochodne $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ w punkcie t_0.

Uwaga 1

Powyższy wzór można zapisać w formie iloczynu macierzy tj.

$$[F'] = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Przykład 2

Korzystając z wzoru z Uwagi 1 obliczyć pochodną funkcji złożonej

$$F(t) = f\big(x(t), y(t)\big),$$

gdy

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad x(t) = e^{2t} - 1, \quad y(t) = e^{2t} + 1.$$

$$[F'] = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$[F'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} & \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{e^{2t}+1}{2(e^{4t}+1)} \cdot 2e^{2t} - \frac{e^{2t}-1}{2(e^{4t}+1)} \cdot 2e^{2t}\right] = \left[\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}\right]$$

Zatem

$$F'(t) = \frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}.$$

Uwaga 3

Jeżeli f jest funkcją tylko jednej zmiennej, to reguły różniczkowania funkcji złożonej $F(u,v) = f\big(x(u,v)\big)$ przyjmują postać

$$F'_u = f' \cdot x'_u, \qquad F'_v = f' \cdot x'_v.$$

Powyższe wzory można zapisać w formie iloczynu macierzy tj.

$$\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3 (O pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Jeżeli

1. *funkcje $x = x(u,v)$ i $y = y(u,v)$ mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (u_0, v_0),*
2. *funkcja $z = f(x,y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $\big(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)\big)$,*

to funkcja złożona $F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ ma w punkcie (u_0, v_0) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu wyrażone wzorami:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

gdzie pochodne cząstkowe $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ obliczone są w punkcie (u_0, v_0),
a pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $\big(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)\big)$.

Uwaga 2

Powyższe wzory można zapisać w formie iloczynu macierzy tj.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Przykład 3

Korzystając z wzoru z Uwagi 2 obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji złożonej

$$F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big),$$

gdy

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad x(u,v) = u + v, \quad y(u,v) = u - v.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y & 2y - x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y & 3x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 6v \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 2u \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 6v$$

Twierdzenie 4

Niech funkcja $g:\Omega\to\mathbb{R},\ \Omega\subset\mathbb{R}^k$ *będzie funkcją klasy* C^1, $f=(f_1,\dots,f_k):D\to\mathbb{R}^k,\quad D\subset\mathbb{R}^m,\ f(D)\subset\Omega,\quad x_0\in D$ *i* $f(x_0)\in\Omega$ *wraz z pewnymi otoczeniami oraz istnieją* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ *dla* $i\in\{1,\dots,k\},\quad j\in\{1,\dots,m\}$.
Wówczas istnieje pochodna funkcji złożonej $g\circ f$ *w* x_0 *określona macierzą Jacobiego*

$$\mathbf{J}_{\mathrm{g\circ f}}(x_0)=\mathbf{J}_{\mathrm{g}}\big(f(x_0)\big)\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x_0).$$

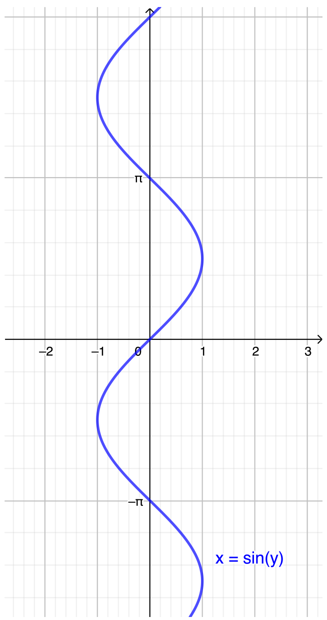
Zamiana zmiennych

W niektórych rozważaniach wygodnie jest daną funkcję wyrazić w nowych zmiennych. Niech g będzie funkcją rzeczywistą klasy C^1 określoną na zbiorze otwartym $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ i niech f będzie funkcją różnowartościową klasy C^1 odwzorowującą zbiór otwarty $D\subset\mathbb{R}^m$ na Ω. Możemy wówczas rozważać funkcję $h=g\circ f$ i z Twierdzenia 4 otrzymujemy, że

$$\mathbf{J}_{\mathrm{h}}(x)=\mathbf{J}_{\mathrm{g\circ f}}(x)=\mathbf{J}_{\mathrm{g}}\big(f(x)\big)\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x)\quad\text{dla } x\in D.$$

A stąd pochodne cząstkowe funkcji g możemy wyrazić następująco

$$\mathbf{J}_{\mathrm{g}}(y)=\mathbf{J}_{\mathrm{h}}(x)\cdot\big(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(x)\big)^{-1}\quad\text{gdzie } y=f(x).$$



Funkcje uwikłane

Definicja 2

Funkcją uwikłaną określoną przez warunek $F(x,y)=0$ *nazywamy każdą funkcję* $y=y(x)$ *spełniającą równość*

$$F(x,y(x))=0$$

dla wszystkich x *z pewnego przedziału* I.
Podobnie określa się funkcję uwikłaną postaci $x=x(y)$, *gdzie* $y\in J$.

Twierdzenie 5 (O istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej)

Niech funkcja F *ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu* (x_0,y_0) *oraz niech spełnia warunki:*

1. $F(x_0,y_0)=0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Wtedy na pewnym otoczeniu U *punktu* x_0 *istnieje jednoznacznie określona funkcja* $y=y(x)$ *spełniająca warunki:*

$$y(x_0)=y_0\quad i\quad y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}\quad \text{dla każdego } x\in U.$$

Uwaga 4

Jeżeli funkcja F *spełnia założenia Twierdzenia 5, to istnieje styczna do funkcji uwikłanej* $y=y(x)$ *w punkcie* x_0 *określona wzorem*

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$$

Przykład 4

Zbadać czy równanie $x - \sin y = 0$ *określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną* $y = y(x)$ *na pewnym otoczeniu punktów* $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $B = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$F(x,y) = x - \sin y, \qquad F \text{ jest funkcją ciągłą}$$

$$F\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 0, \quad F\Big(1, \frac{\pi}{2}\Big) = 1 - \sin\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\cos y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \text{ jest funkcją ciągłą}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\Big) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\Big(1, \frac{\pi}{2}\Big) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Zatem równanie $x - \sin y = 0$ *określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną* $y = \arcsin x$ *dla* $x \in (0,1)$. *Ponieważ* $\frac{\partial F}{\partial y}(B) = 0$, *więc założenia Twierdzenie 5 nie są spełnione i nie możemy z niego korzystać.*

Uwaga 5

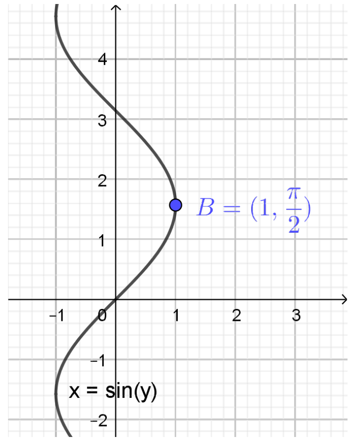
$$F(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x) = 0,$$

a stąd $$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \quad \text{dla każdego } x \in U$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dx} + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\Big) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

Przykład 4 c.d.



W otoczeniu punktu B równanie $x - \sin y = 0$

nie określa żadnej funkcji uwikłanej postaci $y = y(x)$.

Przykład 5

Obliczyć pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ *określonej równaniem*

$$xe^y + ye^x - 2 = 0 \quad \text{w punkcie } x_0 = 0.$$

Napisać równanie stycznej do funkcji uwikłanej $y = y(x)$ *w punkcie* $x_0 = 0$.

$$F(x,y) = xe^y + ye^x - 2$$

$$F(0, y_0) = y_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) = (0, 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x - \text{ funkcja ciągła}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = e^2 + 2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x - \text{ funkcja ciągła}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 1,$$

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -(e^2 + 2)$$

Równanie szukanej stycznej ma postać

$$y = -(e^2 + 2)x + 2.$$

Twierdzenie 6 (O ekstremach lokalnych funkcji uwikłanej)

Niech funkcja F *ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu* (x_0, y_0) *oraz niech spełnia warunki:*

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,
3. $A = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0$.

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ *określona przez równanie* $F(x, y) = 0$ *ma w punkcie* x_0 *ekstremum lokalne właściwe i jest to*

minimum, gdy $A > 0$ *albo maksimum gdy* $A < 0$.

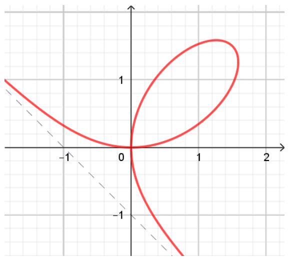
Uwaga 6

Równość $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ *jest warunkiem koniecznym , a nierówność* $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \neq 0$ *warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum funkcji uwikłanej.*

Liść Kartezjusza

Liść Kartezjusza - krzywa opisana równaniem

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0.$$



Wykres liścia Kartezjusza dla $a = 1$

Przykład 6

Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ *określonych równaniem*

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ *- wszystkie pochodne cząstkowe* F *są funkcjami ciągłymi,*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 6x.$$

Rozwiązujemy układ warunków:
$F(x, y) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, *czyli w naszym przykładzie:*
$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \ \wedge\ 3x^2 - 3y = 0 \ \wedge\ 3y^2 - 3x \neq 0$.

$y = x^2 \ \Rightarrow\ (x^3 + x^6 - 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^6 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow [x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2}])$

Punkt $(0, 0)$ *– odpada, bo wówczas* $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x = 0$.
Punkt $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ *– spełnia warunek konieczny istnienia ekstremum, liczymy*

$$A = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = -\frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{2}} = -2 < 0,$$

co oznacza, że w $x_0 = \sqrt[3]{2}$ *funkcja uwikłana* $y = y(x)$ *określona równaniem* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ *ma maksimum lokalne właściwe i wynosi ono* $\sqrt[3]{4}$.